Vielfachheit von Nullstellen – ...

Für alle Parameterwerte gilt zunächst: $k \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle Nullstellen mit ihren Vielfachheiten:

a) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x-k)^2(x+2)$

b) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x-3)^2(x+k)$

c) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}k(x-3)^2(x+2)$

d) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}kx(x-3)^2(x+2)$

e) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x-3)^2(x+2k-1)$

f) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x-3)^2(x+2)(x+k)$

g) $f_k : x \mapsto -\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}kx^2-\frac{1}{8}k^2x$

h) $f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x^3-kx^2-4x+4k)\,;\,x_1=k$

Aufgabe 95 AII

$f_k : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3-6kx^2+9k^2x)$ mit $k>0$.
Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f_k mit ihren Vielfachheiten. [4]

Aufgabe 96 AI

$f : x \mapsto -\frac{4}{3}(-x^3-3x^2+2)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen. [7]

Aufgabe 96 AII

$f_k : x \mapsto -\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}kx^2$.
Bestimmen Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch, und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen in der Umgebung der Nullstellen. [7]

Aufgabe 97 AI

$f_k : x \mapsto -\frac{4}{9}kx^2+\frac{8}{9}kx$ mit $k>0$.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Bereich, für den $f_k(x)\ge 0$ bzw. $f_k(x)\le 0$ ist. [5]

Aufgabe 97 AII

$f : x \mapsto \frac{1}{3}(x^3-3x^2-9x+2)$.
Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f. [5]

Aufgabe 98 AI

$f_k : x \mapsto \frac{1}{8}(x-3)^2(x+2) = \frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{8}x+\frac{9}{4}$.
Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an. [2]

Aufgabe 98 AII

$f_k : x \mapsto \frac{1}{9}(x^4-kx^2-9x^2+9k)$ mit $k\ge 0$.
Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie. [2]
Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $f_k(x)$ auch in der Form $f_k(x) = \frac{1}{9}(x^2-k)(x^2-9)$ schreiben lässt, und ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. [9]

Aufgabe 00 AII

$f : x \mapsto -x^3+9x^2-17x-3$.
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. Runden Sie die Ergebnisse falls nötig auf zwei Nachkommastellen. [5]

Aufgabe 01 AI

$f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3-3x+4$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihren Vielfachheiten und zerlegen Sie den Funktionsterm f(x) in Linearfaktoren. [7]

Aufgabe 01 AII

$f_k : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^3+kx^2-2kx-8)$.
Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor. [5]
Mögl. Teilerg.: $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^2+kx+2x+4)(x-2)$

Aufgabe 02 AII

$f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}(a-x)(x^2+4x+4)$.
Bestimmen Sie das Intervall, in dem $f_a(x)\ge 0$. [4]
Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit jeweiliger Vielfachheit an. [2]

Aufgabe 03 AI

$f : x \mapsto \frac{1}{32}x^4-x^2+8$.
Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie. [2]
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. Geben Sie auch die Vielfachheiten an. [4]

Aufgabe 03 AII

$f_k : x \mapsto -\dfrac{1}{2k^2}(x^3-6kx^2+8k^2x)$ mit $k>0$.
Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Es gibt unter den Funktionen f_k solche mit genau einer Nullstelle. [4]
Berechnen Sie alle Nullstellen von f_2. [3]

Aufgabe 04 AI

$f_k : x \mapsto \dfrac{1}{27}(x+3)^2(x^2+k)$.
Zunächst sei $k \ne -9$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Lage der Nullstellen sowie deren Vielfachheit. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k>0$, $k=0$ und $k<0$. [7]

Lösungen zu: Vielfachheit von Nullstellen

Aufgabe	x_1	x_2	x_3	Bemerkung / Sonderfälle
a)	k ; (1-f.) –2 ; (3-f.)	–2; (2-f.)		 k = –2
b)	3 ; (2-f.) 3 ; (3-f.)	–k ; (1-f.)		 k = –3
c)	3 ; (2-f.)	–2 ; (2-f.)		k = 0 : ∞ viele NSt, f(x) = 0
d)	0 ; (1-f.)	3 ; (1-f.)	–2; (1-f.)	k = 0 : ∞ viele NSt, f(x) = 0
e)	3 ; (2-f.) 3 ; (3-f.)	1–2k ; (1-f.)		$f(x) = (x-3)^2[\ x-(1-2k)\ ] / 8$ k = –1
f)	3 ; (1-f.) 3 ; (2-f.) 3 ; (1-f.)	–2 ; (1-f.) –2 ; (1-f.) –2 ; (2-f.)	–k ; (1-f.)	 k = –3 k = 2
g)	0 ; (1-f.) 0 ; (3-f.)	k ; (2-f.)		$f(x) = -x(x+k)^2/8$ k = 0
h)	2 ; (1-f.) 2 ; (2-f.) 2 ; (1-f.)	–2 ; (1-f.) –2 ; (1-f.) –2 ; (2-f.)	k ; (1-f.)	$f(x) = (x-k)\cdot(x^2-4)/8$ k = 2 k = –2

Abschlussprüfungen

Aufgabe	x_1	x_2	x_3	Bemerkung / Sonderfälle
95/AII	0 ; (1-f.)	3k ; (2-f.)		Kein SF ! $f(x) = \frac{1}{4}x(x-3k)^2$
96/AI	$N_1(-1\|0)$	$N_2(-1-\sqrt{3}\ \|0)$	$N_2(-1+\sqrt{3}\ \|0)$	$S_y(0\|\frac{8}{3})$
96/AII	0 ; (2-f.) 0 ; (3-f.)	6k ; (1-f.)		 k = 0
97/AI	0 ; (1-f)	2 ; (1-f.)		f(x) ≥ 0 für x ∈ [0;2] f(x) ≤ 0 für x ∈]–∞;0] und x ∈ [2;∞[
97/AII	–2 ; (1-f.)	$\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$	$\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})$	
98/AI	3	–2		
98/AII	–3	3	$-\sqrt{k}$	$x_4 = \sqrt{k}$ (Achsensym. für alle k)
	–3 ; (2-f.)	3 ; (2-f.)		k = 9
	–3 ; (1-f.)	3 ; (1-f.)	0 ; (2-f.)	k = 0
00/AII	3	$3+\sqrt{10}$	$3-\sqrt{10}$	
01/AI	2 ; (2-f.)	–4 ; (1-f.)		LF: $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$
02/AII	a ; (1-f.)	–2 ; (2-f.)		x∈]–∞; a] ∪ {–2} (←falls a < –2)
03/AI	–4 ; (2-f.)	4 ; (2-f.)		Achsensym. zur y-Achse
03/AII	0 ; (1-f.)	4k ; (1-f.)	2k ; (1-f.)	Immer 3 versch. NS., da D>0 und k ≠0
04/AI	–3 ; (2-f.)	$-\sqrt{-k}$; (1-f.)	$\sqrt{-k}$; (1-f.)	k < 0 und k ≠ –9
	–3 ; (2-f.)	0 ; (2-f.)		k = 0
	–3 ; (2-f.)			k > 0